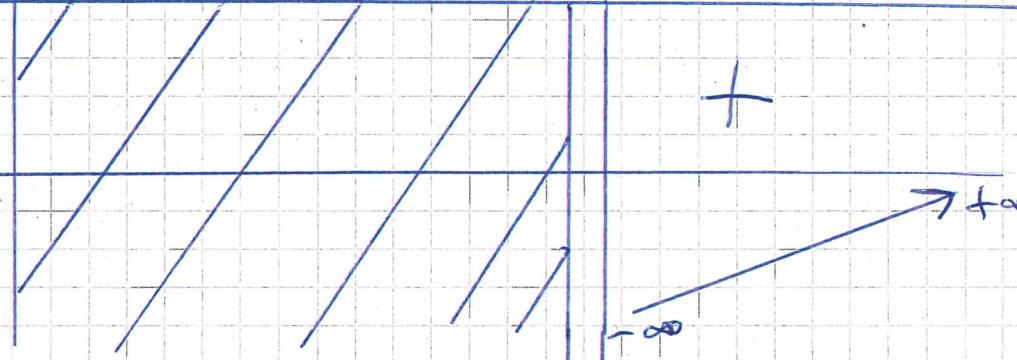


4) * φ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que opérations de fonctions définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$* \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi'(x) = \frac{1}{x} + 2 = \frac{2x+1}{x}$$

$$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
signe de $2x+1$	-	0	+	+
signe de x	-	-	0	+
signe de $\varphi'(x)$	/	/	/	+
variations de φ				

$$* \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x - 4 = -4$$

par somme,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 4 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \left(1 - \frac{2}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \quad \text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$$

par somme,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$$

φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
 $[1/2] \subset \mathbb{R}_+^*$, donc sur $[1/2]$.



CONCOURS contrôle externe

ANNÉE 2025

INDIQUEZ VOTRE NUMÉRO DE CANDIDAT

N°

Note :

20,00

N.B : Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer la provenance de la copie.

ÉPREUVE

de mathématiques

NOMBRE D'INTERCALAIRES : 4

QCM :

Partie A : 1) a) 2) c) 3) b) 4) d)

Partie B : 5) b) 6) b)

Partie C : 7) a) 8) b)

Exercice 2 :

1) Soient les événements suivants :

R_1 : "le candidat réussit le 1^{er} exercice"

R_2 : "le candidat réussit le 2^{ème} exercice"

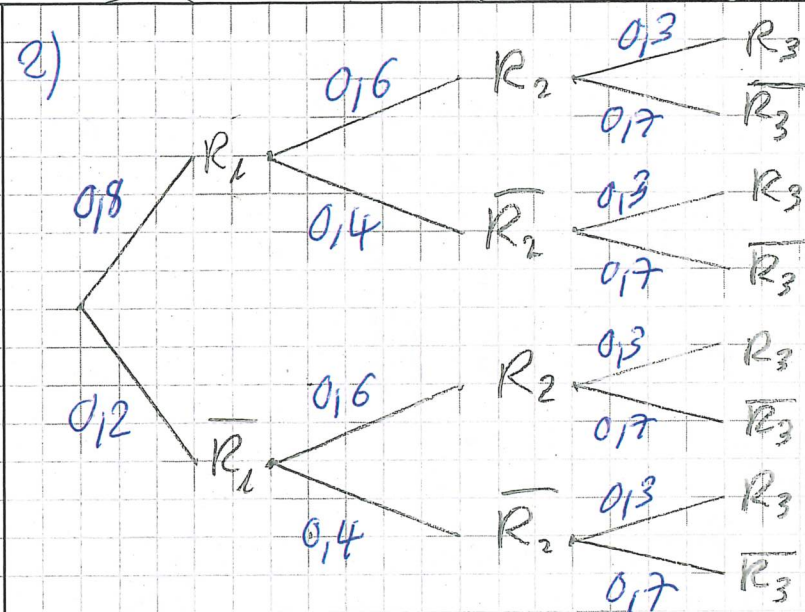
R_3 : "le candidat réussit le 3^{ème} exercice"

$$P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(R_1) \times P(R_2) \times P(R_3)$$

$$R_1, R_2 \text{ et } R_3 \text{ sont indépendants} \Rightarrow 0,8 \times 0,6 \times 0,3$$

2^e 2

$$\text{donc } P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = 0,144 = P_1$$



$$P(\bar{R}_1 \cap \bar{R}_2 \cap \bar{R}_3) = P(\bar{R}_1) \times P(\bar{R}_2) \times P(\bar{R}_3)$$

$\bar{R}_1, \bar{R}_2$ et $\bar{R}_3$ sont indépendants

$$= 0,2 \times 0,4 \times 0,7$$

2 à 2

d'où $P(\bar{R}_1 \cap \bar{R}_2 \cap \bar{R}_3) = 0,056 = P_2$

$$3) P(R_1 \cap \bar{R}_2 \cap \bar{R}_3) + P(\bar{R}_1 \cap R_2 \cap \bar{R}_3) + P(\bar{R}_1 \cap \bar{R}_2 \cap R_3)$$

$$= P(R_1) \times P(\bar{R}_2) \times P(\bar{R}_3) + P(\bar{R}_1) \times P(R_2) \times P(\bar{R}_3) + P(\bar{R}_1) \times P(\bar{R}_2) \times P(R_3)$$

$$= 0,8 \times 0,4 \times 0,7 + 0,2 \times 0,6 \times 0,7 + 0,2 \times 0,4 \times 0,3$$

d'où $P(R_1 \cap \bar{R}_2 \cap \bar{R}_3) + P(\bar{R}_1 \cap R_2 \cap \bar{R}_3) + P(\bar{R}_1 \cap \bar{R}_2 \cap R_3) = 0,332$

d'où $P_3 = 0,332$

4) L'événement contraire de A : "le candidat a réussi au moins une épreuve" est $\bar{A}$: "le candidat n'en a réussi aucune".

$$P_4 = P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P_2 = 1 - 0,056$$

d'où $P_4 = 0,944$

Exercice 3:

1) f est définie sur $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \text{ et } x > 0\}$
donc $D_f = \mathbb{R}_+^*$

car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{1}{x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) - 3 = +\infty$$

donc par produit,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 2 - \frac{1}{x} = -\infty$$

$$x \rightarrow 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) - 3 = -\infty$$

$$x \rightarrow 0^+$$

car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
donc par produit,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

définie, continue et

3) * f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que opérations de fonctions définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$

$$* \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{1}{x^2} (\ln(x) - 3) + \left(2 - \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x^2} [\ln(x) - 3 + 2x - 1] \text{ d'où}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{\ln(x) + 2x - 4}{x^2} \quad \left(= \frac{g(x)}{x^2} \right)$$

NUMÉRO DE CANDIDAT	ÉPREUVE DE	INTERCALAIRE N°
	mathématiques	1/4

b) * ψ est strictement croissante sur $[1/2]$
 * ψ est continue sur $[1/2]$
 * $0 \in]\psi(1) ; \psi(2)[\approx]-2 ; 0,69[$
 donc d'après le théorème de la bijection,
 $\exists ! \alpha \in [1/2]$ tel que $\psi(\alpha) = 0$.

c)	x	0	1	α	2	$+\infty$
variations de ψ						$\nearrow +\infty$
signe de $\psi(x)$		-	-	0	+	+

d'où

$$\forall x \in]0 ; \alpha[, \psi(x) < 0$$

$$\forall x \in]\alpha ; +\infty[, \psi(x) > 0$$

$$\psi(\alpha) = 0 \quad (1,72 < \alpha < 1,73)$$

$$5) \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{\psi(x)}{x^2}$$

x	0	1	α	2	$+\infty$
signe de x^2	0	+	+	+	+
signe de $\psi(x)$		-	-	0	+
signe de $f'(x)$		-	-	0	+
variations de f		$\searrow$		$\nearrow$	$\nearrow +\infty$

NUMÉRO DE CANDIDAT	ÉPREUVE DE	INTERCALAIRE N°

6) * F est une primitive de f sur $]0; +\infty[$
d'où $\forall x \in]0; +\infty[, F'(x) = f(x)$

* On cherche le signe de $f(x)$.

1) f est continue sur $]0; \alpha[$

2) f est strictement décroissante sur $]0; \alpha[$

3) $0 \in]f(\alpha); \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)[=]f(\alpha); +\infty[$

(car $f(\alpha) < 0$, car $f(\alpha) \approx -3,4$)

Ainsi, d'après le théorème de la bijection,

$\exists ! \beta \in]0; \alpha[$ tel que $f(\beta) = 0$. ($\beta = 0,5 = \frac{1}{2}$)

* De même, sur $]\alpha; +\infty[$, avec le théorème de la bijection, $\exists ! \gamma \in]\alpha; +\infty[$ tel que $f(\gamma) = 0$.

* Ainsi, $(20,08 < \gamma < 20,09)$

x	0	β	α	γ	$+\infty$		
variations de f		$+\infty$			$+\infty$		
signe de f		+	0	-	-	0	+
variations de F			$F(\beta)$		$F(\gamma)$		

$\beta = 0,5$

F est croissante sur $]0; 0,5[$ et $]\gamma; +\infty[$
et est décroissante sur $]\beta; \gamma[$.

NUMÉRO DE CANDIDAT	ÉPREUVE DE	INTERCALAIRE N°
	mathématiques	2/4

7) On a $a < b$ et $\forall x \in [a; b], |1 - f(x)| \geq 1$.
 donc $\int_a^b |1 - f(x)| dx$ représente l'aire de la
 surface délimitée par les droites d'équation
 $x = a$; $x = b$; l'axe des abscisses et
 la courbe représentative de la fonction
 $g : x \mapsto |1 - f(x)|$ pour $x \in [a; b]$

NUMÉRO DE CANDIDAT	ÉPREUVE DE	INTERCALAIRE N°.

Exercice 4 :

$$1) \text{ Il y a } (3 + 2,5 + 2 + 2 + 2 + 1,5 + 1 + 1) \times 10 = \underline{150 \text{ licenciés.}}$$

$$2) \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^8 m_i x_i}{\sum_{i=1}^8 m_i} = \frac{30 \times 9 + 25 \times 10 + \dots + 10 \times 15 + 10 \times 16}{30 + 25 + \dots + 10 + 10}$$

$$\text{d'où } \bar{x} = \frac{176}{15} \approx 11,733 \text{ années}$$

$$= \frac{11 \times 15 + 11}{15} = 11 + \frac{11}{15} \text{ ans}$$

$$\frac{11}{15} \times 12 = \frac{44}{5} = 8,8 \text{ mois}$$

$$\text{d'où } \bar{x} = 11 \text{ ans et } 8,8 \text{ mois}$$

3) Âge	Effectifs cumulés croissants	Fréquences cumulées croissantes
9	30	0,2
10	55	0,367
11	75	0,5
12	95	0,633
13	115	0,767
14	130	0,867
15	140	0,933

$$\text{médiane} = \frac{11 + 12}{2} = 11,5 \text{ ans} = 11 \text{ ans } 6 \text{ mois}$$

car le 75^{ème} licencié a 11 ans et le 76^{ème} a 12 ans.

NUMÉRO DE CANDIDAT	ÉPREUVE DE	INTERCALAIRE N°
	mathématiques	3/4

* La moitié des licenciés ont moins de 11 ans et 6 mois et l'autre moitié plus de 11 ans et 6 mois.

4) Les valeurs sont assez proches mais la moyenne est plus sensible aux valeurs extrêmes que la médiane.
Les valeurs ne sont pas dispersées et proche

Exercice 5: de la moyenne.

1) * A chaque test, on effectue une expérience de Bernoulli de probabilité $p = 0,005 = p(A)$ où A : "un spectateur oublie son sac dans la salle de concert" est la réussite.

* On répète 750 fois cette expérience de manière identique et indépendante (car "leurs comportements sont indépendants les uns des autres")

* On décrit ainsi un schéma de Bernoulli de paramètre $p = 0,005$ et $n = 750$.

* Ainsi, X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de spectateurs ayant oublié leur sac suit une loi binomiale de paramètre $p = 0,005$ et $n = 750$ ce qui n'est pas une loi

$$2) E(X) = n \times p = 0,005 \times 750$$

$$\text{d'où } E(X) = 3,75 \text{ spectateurs}$$

$$3) V(X) = n \times p \times (1-p) = 0,005 \times 750 \times 0,995$$

Bernoulli
car $750 > 1$

NUMÉRO DE CANDIDAT	ÉPREUVE DE	INTERCALAIRE N°

4) * En moyenne, il y a 3,75 spectateurs qui vont oublier leur sac.

* Il y a de très ^{forte} grande chance que le nombre de spectateurs qui vont oublier leur sac soit dans l'intervalle.

$$[E(X) - \sqrt{V(X)} ; E(X) + \sqrt{V(X)}]$$

$$= [3,75 - \sqrt{3,73125} ; 3,75 + \sqrt{3,73125}]$$

$$= [1,818 ; 5,682]$$

5) $\forall k \in [0; 750]$

$$P(X=k) = \binom{750}{k} \times p^k \times (1-p)^{750-k}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } P(X=0) &= \binom{750}{0} \times 0,005^0 \times 0,995^{750-0} \\ &= 0,995^{750} \end{aligned}$$

donc $P(X=0) = 0,023$

Exercice 6 :

Partie A : Soient les inconnues suivantes :

g : la masse du gros pot en kg

m : la masse du moyen pot en kg

p : la masse du petit pot en kg

Il y a 11 petits pots ; 8 pots moyens et 1 gros pot

* Les 20 pots pèsent en tout 8,4 kg donc

$$11p + 8m + g = 8,4$$

* Chaque étagère supporte le même poids donc

NUMÉRO DE CANDIDAT	ÉPREUVE DE	INTERCALAIRE N°
	mathématiques	4/4

$$\begin{cases} p + 2m + g = 2p + 4m \\ 2p + 4m = 8p + 2m \end{cases}$$

on doit résoudre :

$$\begin{cases} 11p + 8m + g = 8,4 & (L) \\ p + 2m + g = 2p + 4m & (L) \\ 2p + 4m = 8p + 2m & (L) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11p + 8m + g = 8,4 \\ -10p - 6m = 2p + 4m - 8,4 : L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 2p + 4m = 8p + 2m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11p + 8m + g = 8,4 \\ 12p + 10m = 8,4 \\ 6p - 2m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11p + 8m + g = 8,4 \\ 12p + 10 \times 3p = 8,4 \\ m = 3p \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11p + 8m + g = 8,4 \\ 42p = 8,4 \\ m = 3p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g = 8,4 - 11 \times 0,2 - 8 \times 0,6 \\ p = 8,4 / 42 = 0,2 \\ m = 0,6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0,6 \text{ kg} \\ p = 0,2 \text{ kg} \\ g = 1,4 \text{ kg} \end{cases}$$

Ainsi, le petit pot pèse 0,2 kg, le moyen pot pèse 0,6 kg et le grand pot pèse 1,4 kg.

Partie B :

* Le système est définie sur

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \text{ et } y \neq 0\}$$

C' est $\mathbb{R}^2 \setminus (d \cup d')$ où d est l'axe des ordonnées et d' est l'axe des abscisses.

NUMÉRO DE CANDIDAT	ÉPREUVE DE	INTERCALAIRE N°

Posons $X = \frac{L}{x}$ et $Y = \frac{L}{y}$

$$\begin{cases} 3X + 2Y = 5 & (L_1) \\ -2X + Y = 2 & (L_2) \end{cases} \quad \begin{cases} 3X + 2Y = 5 \\ -7X = -1 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{1}{7} \\ Y = \frac{1}{2} \left(5 - 3 \times \frac{1}{7} \right) = \frac{16}{7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{7} \\ \frac{1}{y} = \frac{16}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = \frac{7}{16} \end{cases}$$

$$\left(7 ; \frac{7}{16} \right) \in \mathbb{R}^2 \setminus (d \cup d')$$

d'ou $S = \left\{ \left(7 ; \frac{7}{16} \right) \right\}$